Changements de référentiel

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Cinématique

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \dot{x}(t)\overrightarrow{e_x} + \dot{y}(t)\overrightarrow{e_y} + \dot{z}(t)\overrightarrow{e_z} \qquad \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{x}'(t)\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'(t)\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}'(t)\overrightarrow{e_{z'}}$$

Loi de composition des vitesses

Vitesse d'entraînement

$$\boxed{\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{v}(M/\mathcal{R}) + \overrightarrow{v_e}(M,\mathcal{R}/\mathcal{R}_g)}$$

Translation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_g$

$$\boxed{\overrightarrow{v_e}(M,\mathcal{R}/\mathcal{R}_g) = \vec{v}(O'/\mathcal{R}_g) + \underbrace{x'(t)\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x'}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} + y'(t)\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y'}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} + z'(t)\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{z'}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g}}_{=\vec{0}} = \vec{v}(O'/\mathcal{R}_g)}$$

$$\boxed{\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{v}(M/\mathcal{R}'_g) + \overrightarrow{v_e}(M,\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g) = \vec{v}(M,\mathcal{R}) + \vec{v}(\overrightarrow{O'/\mathcal{R}_g})}$$

Rotation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_g$

$$\boxed{\overrightarrow{v_e}(M,\mathcal{R}/\mathcal{R}_g) = \vec{\omega} \wedge \left(x'(t)\overrightarrow{e_{x'}} + y'(t)\overrightarrow{e_{y'}} + z'(t)\overrightarrow{e_{z'}}\right) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}}$$

$$\boxed{\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{v}(M/\mathcal{R}'_g) + \overrightarrow{v_e}(M,\mathcal{R}/\mathcal{R}_g) = \vec{v}(M,\mathcal{R}) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

Formule de Bour

Soit $\vec{A}$ quelconque,

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{A}}$$

Formule générale

$$\boxed{\overrightarrow{v_e}(M,\mathcal{R}/\mathcal{R}_g) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

$$\boxed{\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{v}(M/\mathcal{R}) + \vec{v}(O'/\mathcal{R}_g) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

Loi de composition des accélérations

Formule générale

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{a}(M/\mathcal{R}) + \vec{a}(O'/\mathcal{R}_g) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)}$$

Distinction des accélérations

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) \quad = \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}) \quad + \quad \underbrace{\vec{a}(O'/\mathcal{R}_g) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}_{\vec{a_e}(M,\mathcal{R}_g/\mathcal{R})} \quad + \quad \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)}_{\vec{a_c}(M,\mathcal{R}/\mathcal{R}_g)}}$$

Accélération d'entraînement (point coïncidant)

$$\boxed{\vec{a_e}(M, \mathcal{R}_g/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}_g) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}$$

Accélération de Coriolis (accélération complémentaire)

$$\boxed{\vec{a_c}(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_g) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)}$$

Translation pure ($\vec{\omega} = \vec{0}$)

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{a}(M/\mathcal{R}) + \vec{a}(O'/\mathcal{R}_g)}$$

Accélération d'entraînement

$$\boxed{\vec{a_e}(M, \mathcal{R}_g/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}_g)}$$

Accélération de Coriolis

$$\boxed{\vec{a_c}(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_g) = \vec{0}}$$

Rotation pure à vitesse constante

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{a_e}(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_g) + \vec{a_c}(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_g)}$$

Accélération d'entraînement (axipète)

$$\boxed{\vec{a_e}(M, \mathcal{R}_g/\mathcal{R}) = -\omega^2 \perp \overrightarrow{r'_\perp} = -\omega^2 \perp \overrightarrow{HM} = -r\omega^2 \vec{e_r}}$$

Accélération de Coriolis (nulle)

$$\boxed{\vec{a_c}(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_g) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}}$$

Dynamique

PFD dans un référentiel non galiléen

$$\boxed{m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{F} + \underbrace{-m\overrightarrow{a_e}(M,\mathcal{R}/\mathcal{R}_g)}_{\overrightarrow{f_{ie}}} + \underbrace{-m\overrightarrow{a_c}(M,\mathcal{R}/\mathcal{R}_g)}_{\overrightarrow{f_{ic}}}}$$

Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_k \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_k}) + \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{f_{ie}}) + \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{f_{ic}})}$$

où

$\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}$	$\triangleq$	$\overrightarrow{OM} \wedge v(M/\mathcal{R})$:	moment cinétique de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$
$\sum_k \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_k})$	$=$	$\sum_k \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_k}$:	moment résultant en O dans $\mathcal{R}$ des forces $\overrightarrow{F_k}$
$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{f_{ie}})$	$=$	$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_{ie}}$:	moment en O dans $\mathcal{R}$ de l'accélération d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}}$
$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{f_{ic}})$	$=$	$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_{ic}}$:	moment en O dans $\mathcal{R}$ de l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}}$